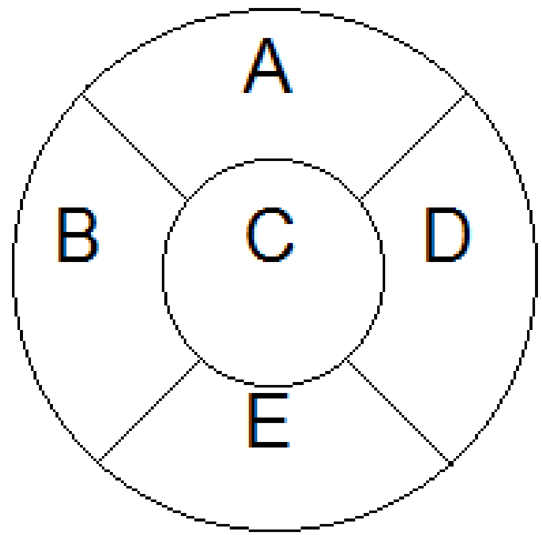
Métodos Quantitativos

Prof. Paulo Fernando Braga Carvalho

paulofernando@pucminas.br

www.paulofernando.mat.br



A – Região norte
B – Região oeste
C – Região central
D – Região leste
E – Região Sul

FIGURA 1: País hipotético e suas divisões regionais

Considere, ainda, que os números indicados nos diagramas da FIGURA 2, representem a densidade demográfica, em habitantes por km² de cada região, em cada um dos países:

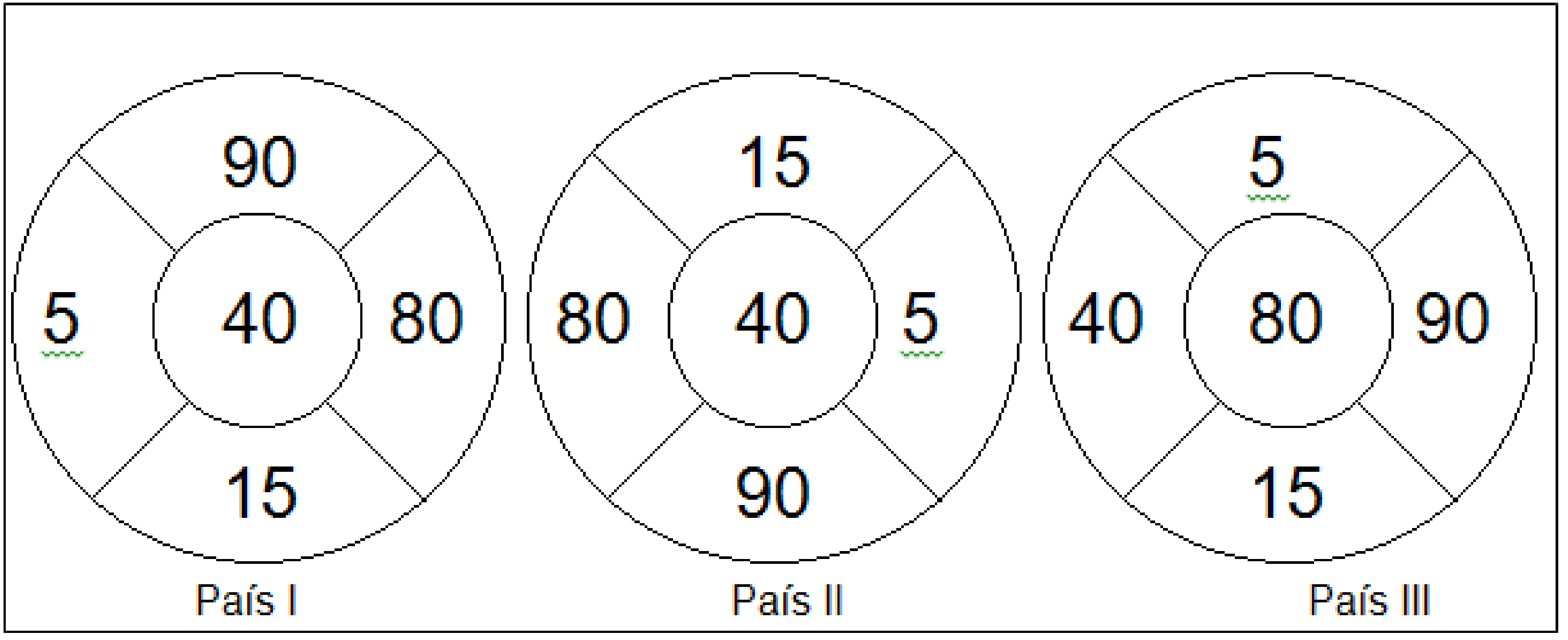


FIGURA 2: Distribuição da densidade demográfica em três países hipotéticos

Observe que para todas as configurações encontramos:

- Média = 46 hab/km^2
- Desvio padrão = 33,97 hab/km^2
- Mediana = 40 hab/km^2
- Amplitude = 85 hab/km^2

- Medidas de tendência central em padrões de pontos
  - Centro Modal
  - Centro Mediano
  - Centro Médio
  - Centro Médio Ponderado

Centro Modal

- Centro Modal é a região ou ponto do espaço onde o fenômeno estudado ocorre com maior freqüência.

- A opção pelo Centro Modal como medida de tendência central deve ser feita com cuidado, já que esta medida não é sensível ao que ocorre nas demais regiões, preocupando apenas com a região que se destaca pela maior frequência.

Centro Mediano

- O conceito de Centro Mediano está diretamente relacionado ao conceito de Mediana.
- Para dados dispostos no espaço o Centro Mediano é determinado pela interseção de duas retas perpendiculares, que dividem o conjunto de pontos em duas partes iguais.
- Considerando os pontos cardeais Norte, Sul, Leste, Oeste como referência, o Centro Mediano é o ponto de interseção da reta que deixa 50% dos pontos ao Sul e 50% dos pontos ao Norte com a reta que deixa 50% dos pontos a Leste e 50% dos pontos a Oeste.

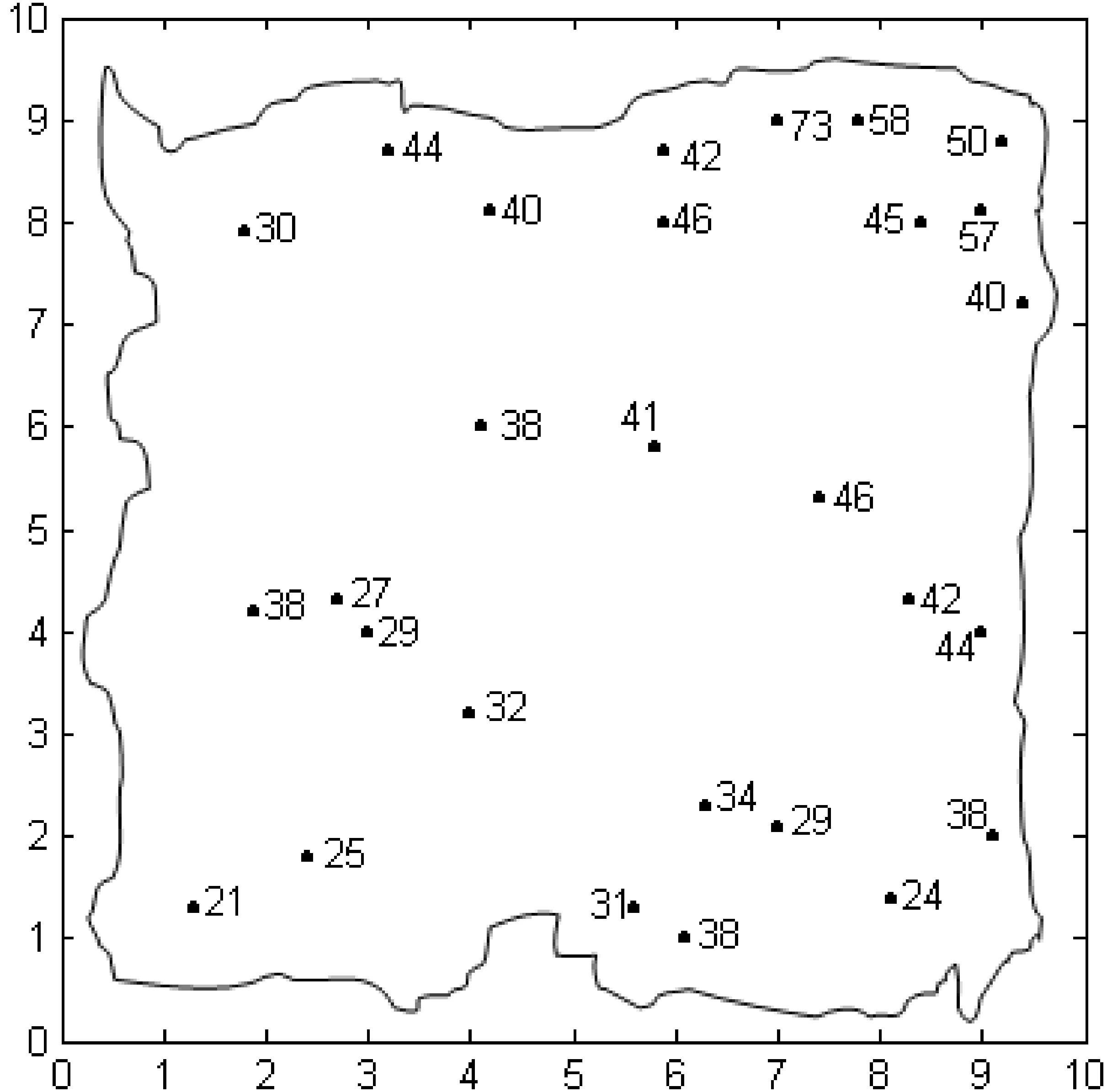
Centro Médio

- O Centro Médio, também conhecido como centróide, é o ponto obtido pela interseção das retas perpendiculares entre si, traçadas a partir da localização de , média das abscissas (coordenadas x) e , média das ordenadas (coordenadas y). Este ponto minimiza a soma das distâncias quadráticas a todos os outros pontos do plano.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

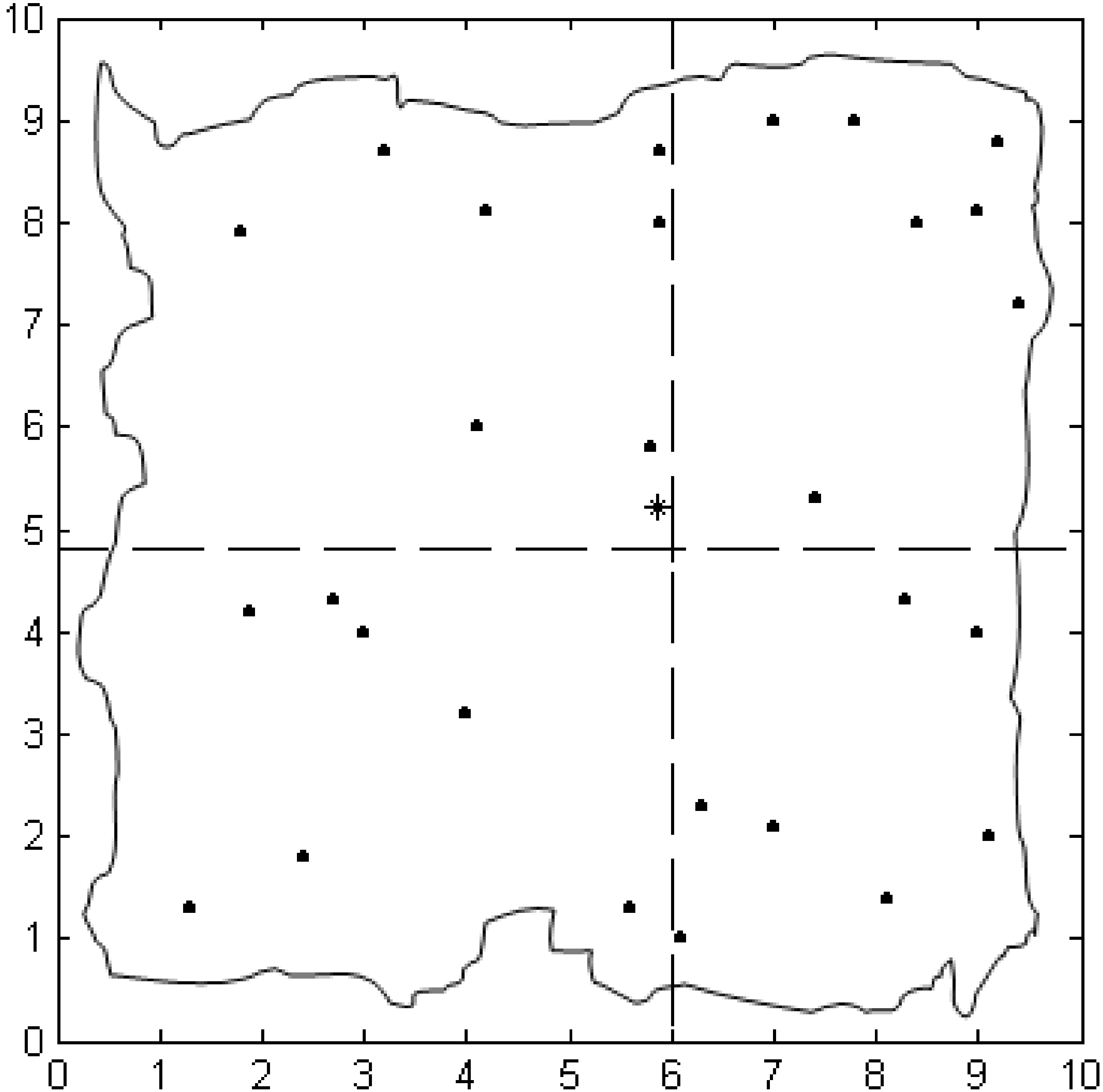
Exemplo 1: Distribuição de um determinado fenômeno e respectivo peso

x	y	p
1,3	1,3	21
1,8	7,9	30
1,9	4,2	38
2,4	1,8	25
2,7	4,3	27
3,0	4,0	29
3,2	8,7	44
4,0	3,2	32
4,1	6,0	38
4,2	8,1	40
5,6	1,3	31
5,8	5,8	41
5,9	8,7	42
5,9	8,0	46
6,1	1,0	38
6,3	2,3	34
7,0	2,1	29
7,0	9,0	73
7,4	5,3	46
7,8	9,0	58
8,1	1,4	24
8,3	4,3	42
8,4	8,0	45
9,0	4,0	44
9,0	8,1	57
9,1	2,0	38



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
44
42
73
58
50
30
40
46
45
57
40
38
41
46
38
27
29
42
44
32
34
29
38
25
21
31
38
24

- O Centro Modal é o ponto de coordenadas (7,9), que representa a cidade com maior frequência, igual a 73.
-
- Para encontrar o Centro Médio, calcula-se a média das abscissas (dos x's) e a média das ordenadas (dos y's), obtendo $\cong$ 5,8536 e $\cong$5,2071.
-
- Calculando a Mediana das abscissas vamos encontrar 6, enquanto a Mediana da ordenadas é igual a 4,8. Logo, o Centro Mediano é o ponto de coordenadas (6; 4,8).



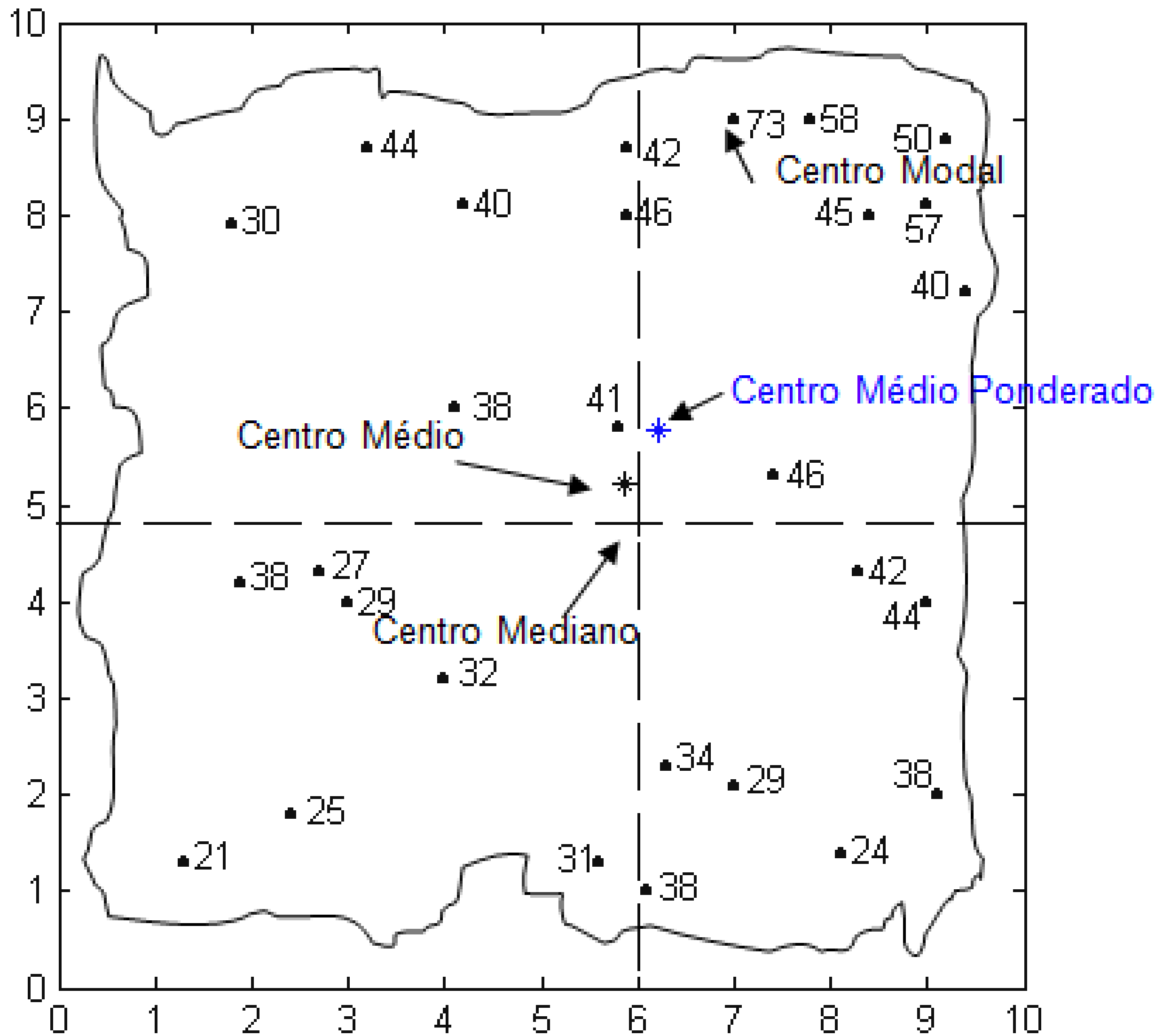
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Centro Médio Ponderado

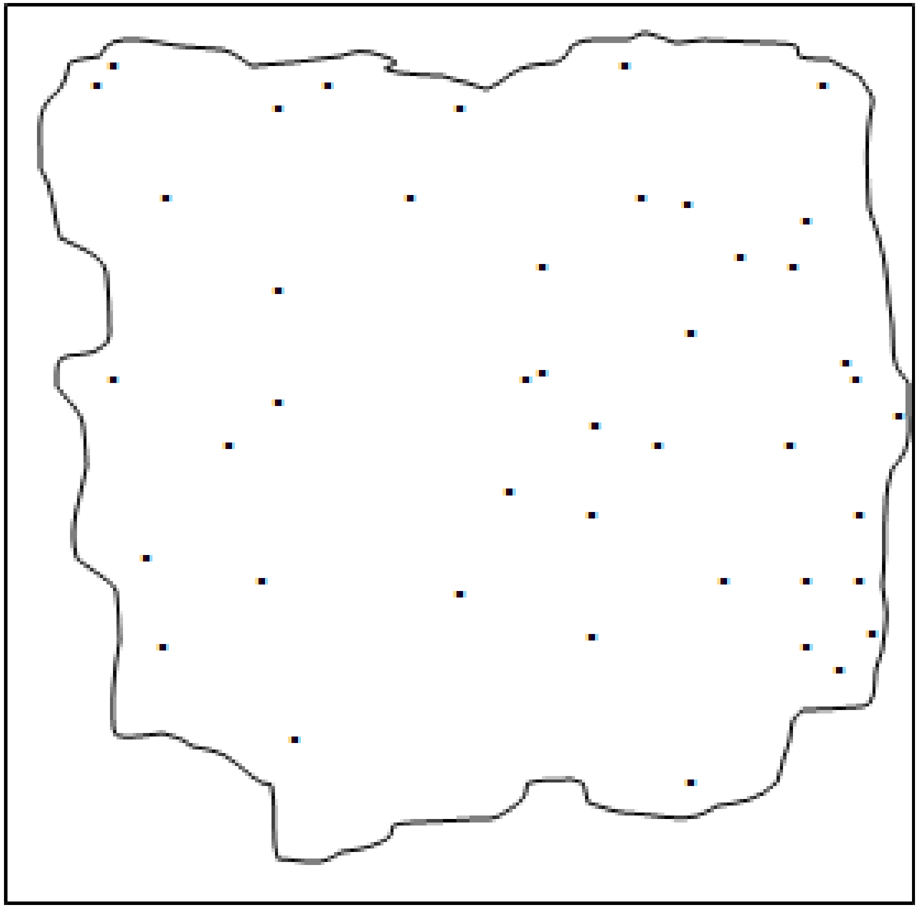
$$\bar{x}_p = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{\sum p_i} \qquad \bar{y}_p = \frac{\sum p_i \cdot y_i}{\sum p_i}$$

$$CM = \left(\bar{x}_p, \bar{y}_p\right)$$

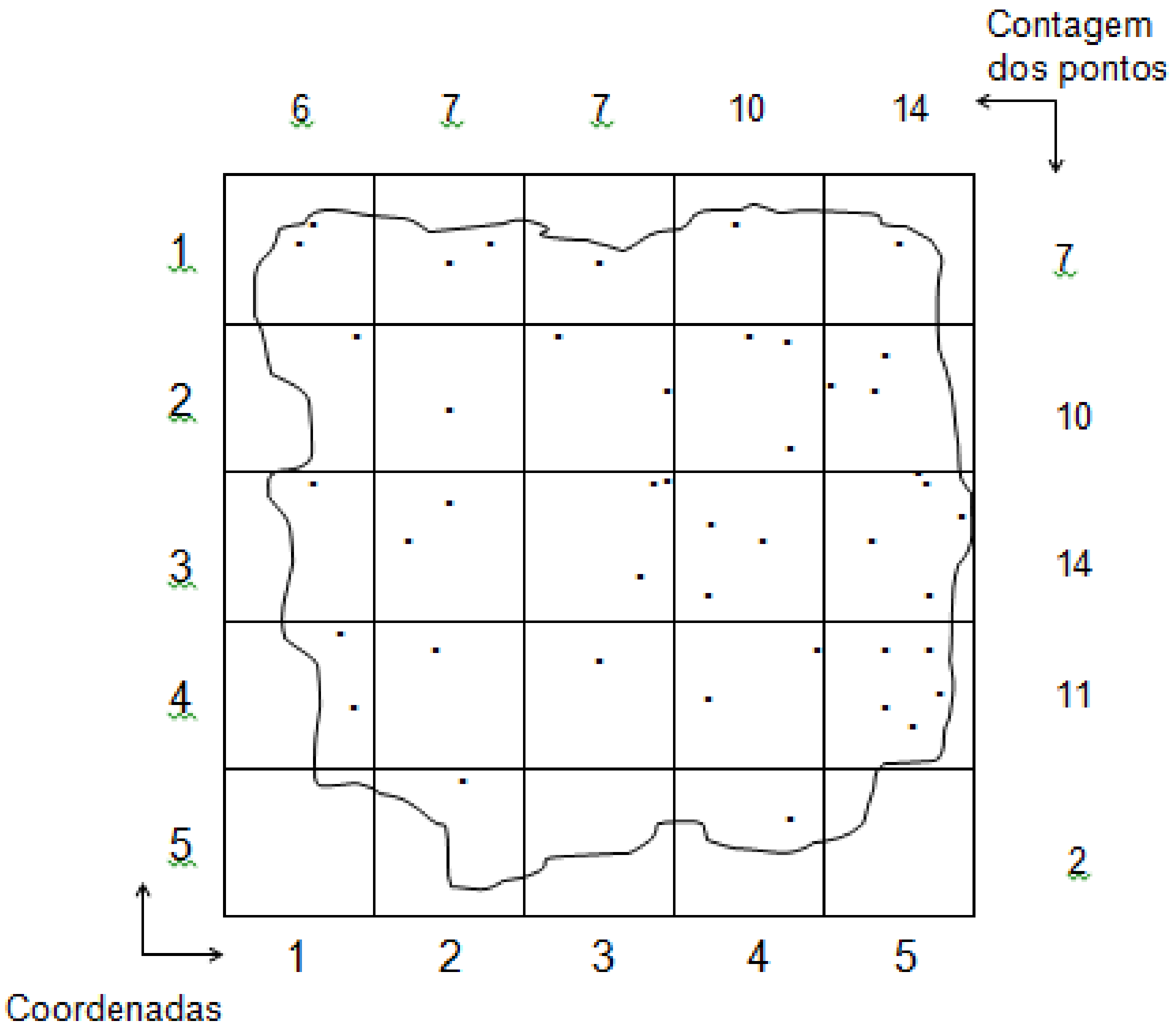
$$\bar{x}_p = \frac{6861{,}2}{1102} = 6{,}2261 \qquad \bar{y}_p = \frac{6365{,}5}{1102} = 5{,}7763$$


Centro Modal
Centro Médio Ponderado
Centro Médio
Centro Mediano
44
42
73
58
50
30
40
46
45
57
40
38
41
46
38
27
29
42
44
32
34
29
38
25
21
31
38
24

Centro Médio para dados agrupados



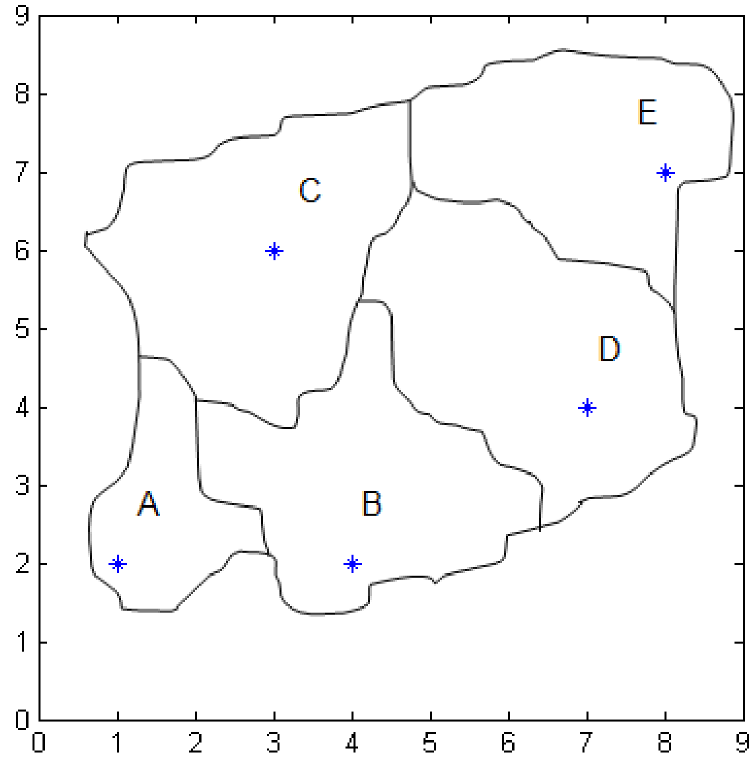
Distribuição da ocorrência de determinado



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot p_i}{n} = \frac{6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 14 \cdot 5}{44} = 3{,}43$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot p_i}{n} = \frac{7 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{44} = 2{,}80$$

- **Exemplo :** Suponha que uma grande empresa de comércio varejista possua 5 supermercados distribuídos em alguns bairros de uma mesma cidade:



Com o crescimento da empresa e da demanda de abastecimento de mercadorias a serem comercializadas pelas unidades, deseja-se estabelecer um local para instalação de um centro de distribuição, o mais econômico possível. Ou seja, busca-se uma localização que proporcione:

- economia de combustível;
- menor tempo de abastecimento das lojas;
- economia de pneus;
- economia na manutenção da frota de caminhões.

Com este objetivo, será determinada uma posição que minimize o deslocamento diário dos caminhões. Ou seja, busca-se um ponto que tenha a soma das distâncias de cada loja a ele como a menor possível.

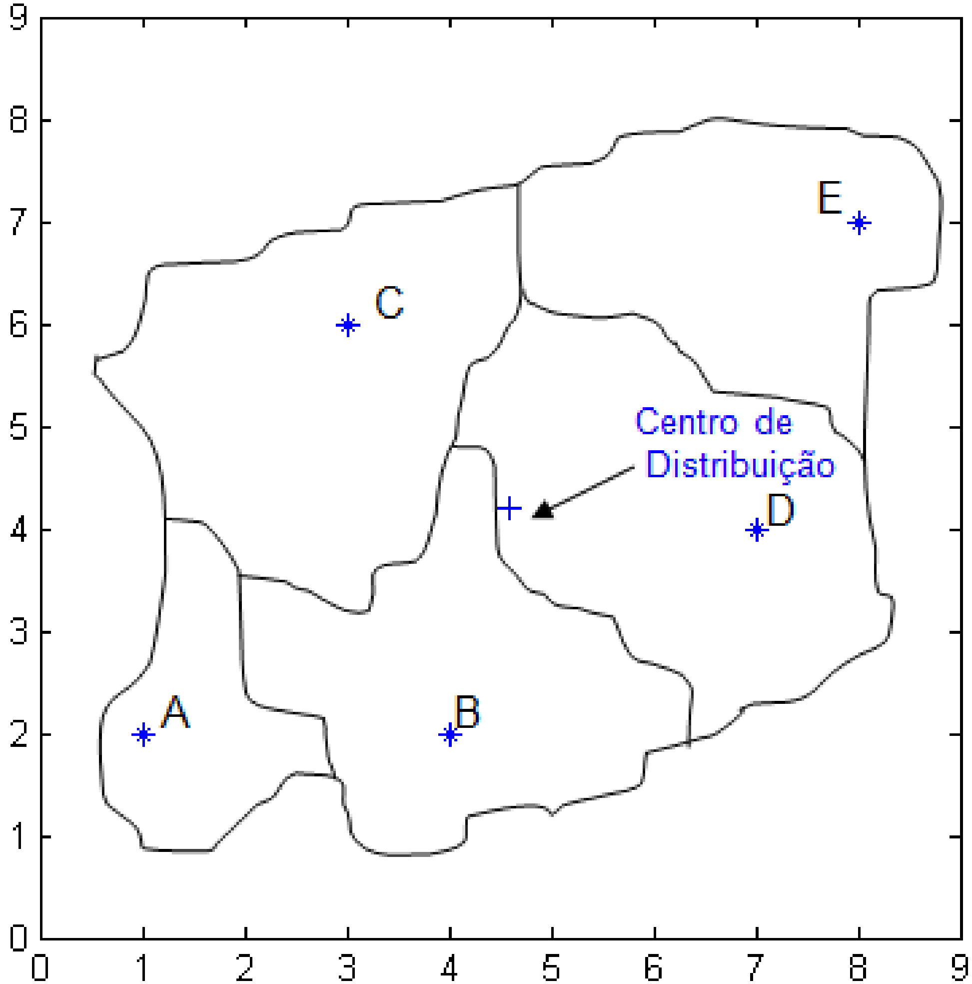
Para tanto, algumas hipóteses serão assumidas:

- Homogeneidade do espaço geográfico;
- Facilidades de acesso idênticas para todas as lojas no trânsito local;

◆O ponto que respeita esta característica é o Centro Médio.

Coordenadas das Lojas de uma grande rede de supermercados

Loja	x	y
A	1	2
B	4	2
C	3	6
D	7	4
E	8	7



C
E
Centro de
Distribuição
D
A
B

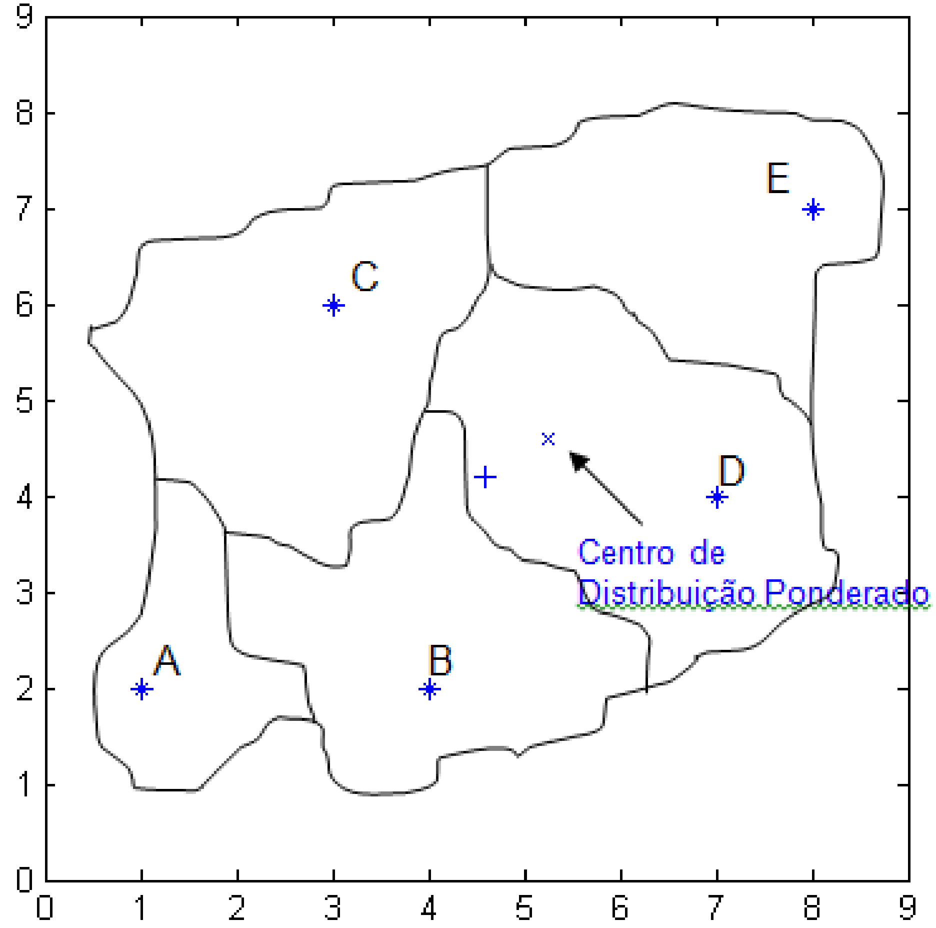
Considerando o peso de cada loja

Localização das lojas e venda em milhares de Reais

Loja	x	y	Venda (em milhares de Reais)
A	1	2	50
B	4	2	120
C	3	6	180
D	7	4	90
E	8	7	200

$$\overline{x}_p = \frac{\sum_{i=1}^{5} p_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{5} p_i} = \frac{1 \cdot 50 + 4 \cdot 120 + 3 \cdot 180 + 7 \cdot 90 + 8 \cdot 200}{50 + 120 + 180 + 90 + 200} = 5{,}16$$

$$\overline{y}_p = \frac{\sum_{i=1}^{5} p_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{5} p_i} = \frac{2 \cdot 50 + 2 \cdot 120 + 6 \cdot 180 + 4 \cdot 90 + 7 \cdot 200}{50 + 120 + 180 + 90 + 200} = 4{,}97$$



C
E
D
A
B
Centro de
Distribuição Ponderado
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

- Medidas de Variabilidade ou Dispersão em distribuições espaciais de pontos
  - Retângulo Quartílico
  - Índice de dispersão
  - Distância Padrão
  - Distância Padrão Ponderada
  - Dispersão relativa

Retângulo Quartílico

O retângulo quartílico está diretamente relacionado com a ideia do Percentil, assunto já abordado anteriormente. Em especial, aplicam-se os percentis 25 e 75, também denominados quartis 1 e 3.

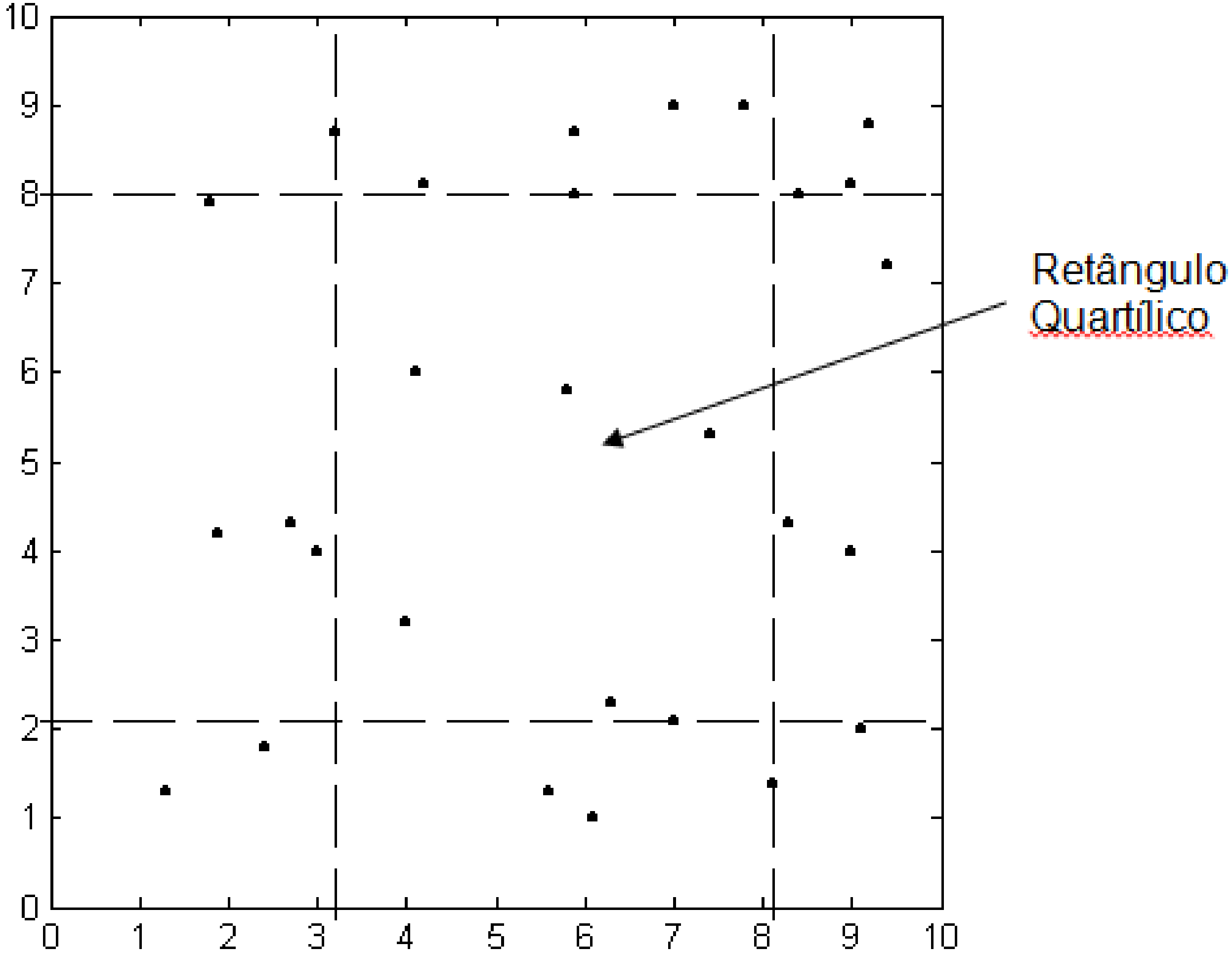
A figura denominada retângulo quartílico é obtida quando é traçado o segmento que divide o conjunto de dados deixando dos dados abaixo e acima, ou seja o segmento que passa pelo P_{25} (Quartil 1) e o segmento que deixa dos dados abaixo e acima dele, portanto o segmento deve passar pelo P_{75} (Quartil 3).

Isto será feito para os eixos x e y. As interseções destes segmentos determinarão o Retângulo Quartílico.

Voltando aos dados do exemplo 1
Calculando as abscissas:

$P_{25,x} = 3,2$ (25% de 28 = 7, logo
$P_{25,x}$ é o 7º termo) e
$P_{75,x} = 8,1$.

Enquanto, para as ordenadas:
$P_{25,y} = 2,1$ e
$P_{75,y} = 8,0$.


Retângulo
Quartílico
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Índice de Dispersão

Na tentativa de dar significado para o Retângulo Quartílico, obtido no item anterior, calcula-se o Índice de Dispersão (ID), que indicará a magnitude deste retângulo em relação ao todo.

Usando a notação:

Área total: A

Área do Retângulo Quartílico: A_{RQ}

Índice	Área
1	A
ID	A_{RQ}

$$ID = \frac{A_{RQ}}{A}$$

Para o problema do exemplo 1:

$A = 10 \cdot 10 = 100$

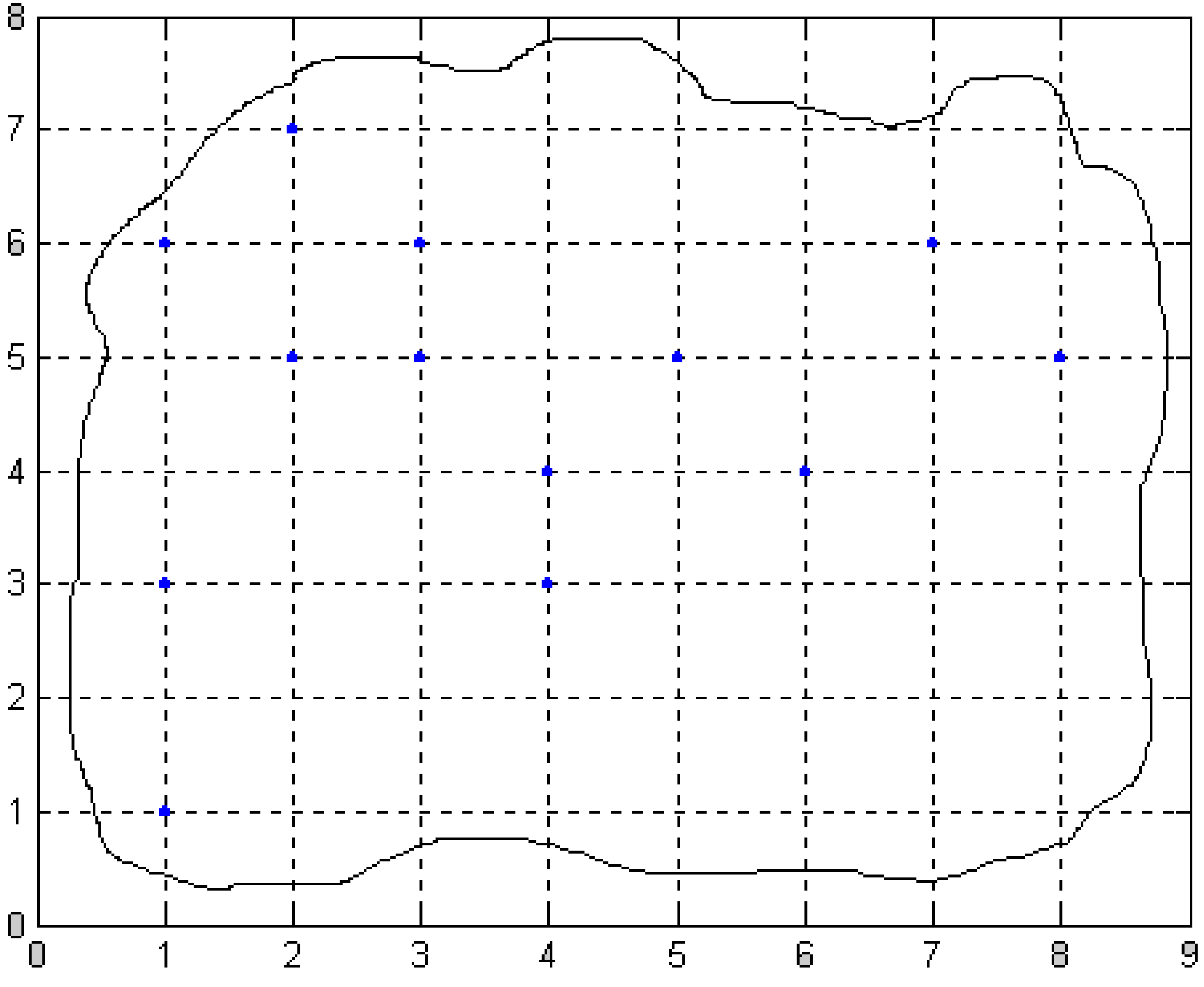
$A_{RQ} = (8,1 - 3,2) \cdot (8,0 - 2,1) = 28,91$

Portanto,

Este valor indica que 28,91% da área total, onde os dados estão distribuídos, está contida no Retângulo Quartílico.

Observe que o Índice de Dispersão varia de 0 a 1. O ID será igual a zero se a área do Retângulo Quartílico for igual a zero, o que indica concentração máxima, ou seja, os pontos estão todos sobrepostos. O ID será igual a 1 se a área do Retângulo Quartílico for igual à área total, o que indica máxima dispersão. Mas, isto ocorrerá apenas se todos os pontos estiverem margeando a região total.

O valor 0,25 indica uma distribuição uniforme dos pontos.


8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Distância Padrão

- A Distância Padrão ou Raio Padrão representa a variabilidade de um conjunto de pontos em torno do ponto central, que pode ser o Centro Médio, Centro Médio Ponderado, etc.
- É equivalente ao desvio padrão;

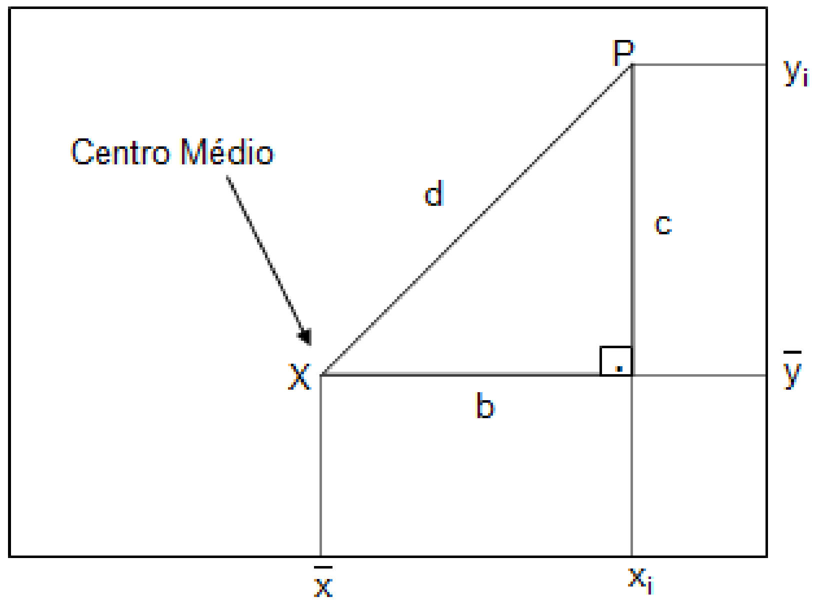


FIGURA 5: Construção auxiliar para obtenção da Distância Padrão

Dados: d : distância de P até X

b: distância horizontal entre P e X

c: distância vertical entre P e X

Medidas obtidas:

$$b = x_i - \bar{x}$$

$$c = y_i - \bar{y}$$

Distância Padrão

$$DP = \sqrt{\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right) + \left(\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2\right)}$$

Voltando ao exemplo 1

$$DP = \sqrt{\left(\frac{1139,27}{28} - 5,8536^2\right) + \left(\frac{982,16}{28} - 5,2071^2\right)}$$

Dp = 3,7930

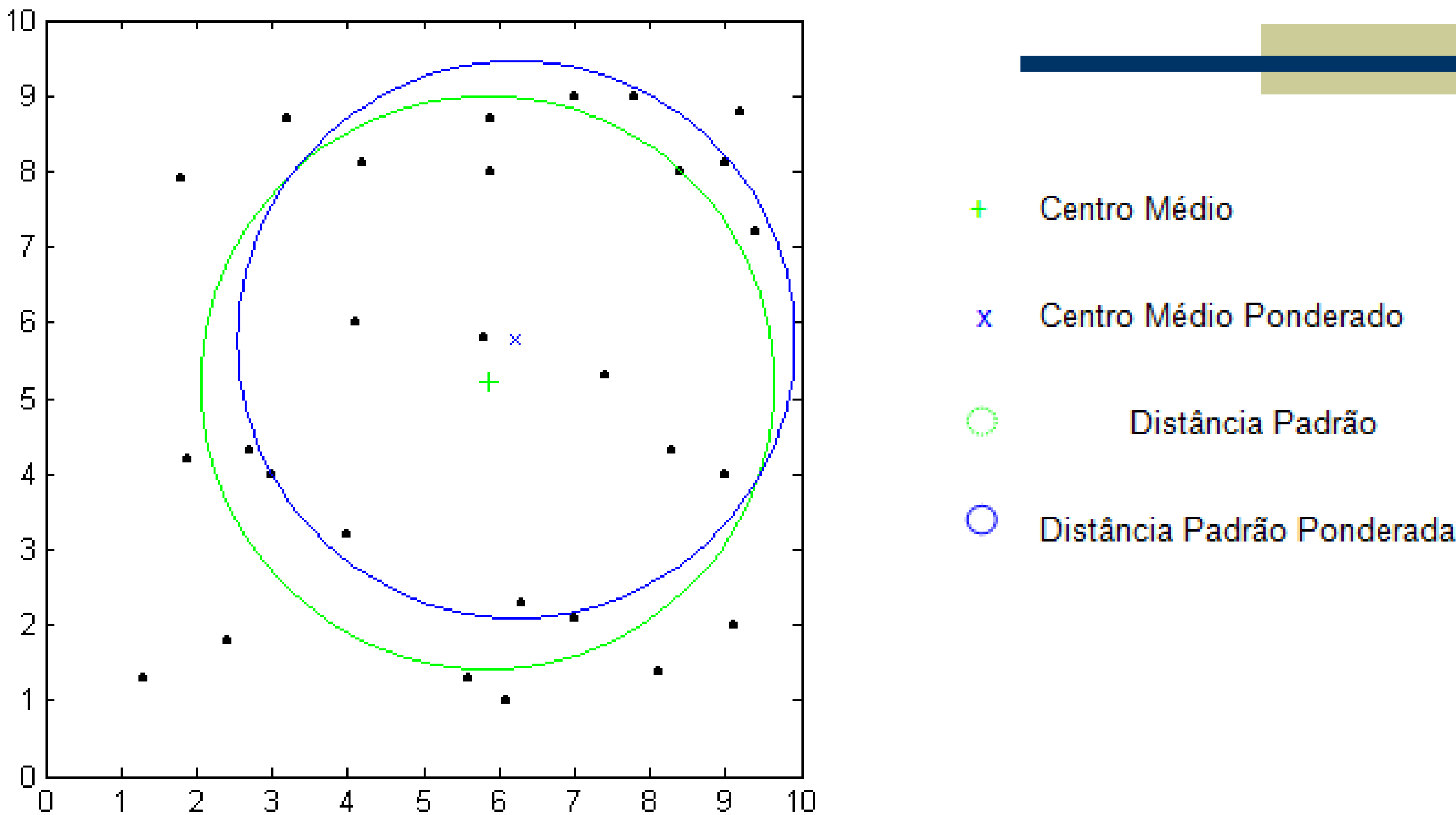
Distância Padrão Ponderada

$$\mathrm{DPP} = \sqrt{\frac{\sum p_i \left(x_i - \overline{x}_p\right)^2}{\sum p_i} + \frac{\sum p_i \left(y_i - \overline{y}_p\right)^2}{\sum p_i}}$$

Voltando ao exemplo 1

- Para os dados do exemplo 1:

$$\mathrm{DPP} = \sqrt{\frac{6421{,}09}{1102} + \frac{8552{,}13}{1102}} = 3{,}6861$$


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Centro Médio
Centro Médio Ponderado
Distância Padrão
Distância Padrão Ponderada

Dispersão relativa

- Uma Distância Padrão de 10km indica alto grau de dispersão do fenômeno estudado? Depende. Se o referencial for um país inteiro como o Brasil, provavelmente é possível considerá-la muito baixa, mas, se o referencial for uma cidade de porte médio, estes mesmos 10km de Distância Padrão, provavelmente, estarão indicando altíssimo grau de dispersão.

Adotando:

r raio da circunferência de área igual à da região estudada

Dp Distância padrão (também pode ser Distância Padrão Ponderada)

Dr Dispersão relativa

Observação: **r** e **Dp** devem estar na mesma unidade de medida

Raio	Fração
r	1
Dp	Dr

$$\frac{r}{Dp} = \frac{1}{Dr}$$

$$r \cdot Dr = 1 \cdot Dp$$

$$\boxed{Dr = \frac{Dp}{r}}$$

Dispersão relativa

$$\boxed{Dr = \frac{Dp}{r}}$$

Onde,

$$A_{total} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{A}{\pi} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}}$$

Quanto mais próximo de 1 maior a dispersão do fenômeno.

Comparar a dispersão de um fenômeno em duas regiões com áreas iguais a A_1=985km^2 e A_2=1756km^2, e com medidas de distância padrão, respectivamente iguais a Dp_1= 5 km e Dp_2= 6,2 km.

$$r_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} = 17{,}7069 \Rightarrow DR_1 = \frac{5}{17{,}7069} = 0{,}2824$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{A_2}{\pi}} = 23{,}6422 \Rightarrow DR_2 = \frac{6{,}2}{23{,}6422} = 0{,}2622$$