Capítulo 1

Coordenadas cartesianas

1.1 Problemas Propostos

1.1 *Dados* $A(-5)$ *e* $B(11)$*, determine:*

(a) $|AB|$ (b) $|BA|$ (c) $\overline{AB}$ (d) $\overline{BA}$

1.2 *Determine os pontos que distam* 9 *unidades do ponto* $A(2)$.

1.3 *Dados* $A(-12)$ *e* $\overline{AB} = -5$*, determine* B.

1.4 *Determine o ponto médio e os pontos de triseção do segmento de extremidades* $A(7)$ *e* $B(19)$.

1.5 *Dados* $A(a)$*,* $B(2a+1)$*,* $C(3a+2)$ *e* $D(4a+3)$*, determine* $P(x)$*, tal que*

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{PC} - \overline{PD} = 0.$$

1.6 *Dados* $A(-1)$*,* $B(1)$*,* $C(4)$ *e* $D(6)$*, determine* $P(x)$*, tal que*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

1.7 *Um móvel se desloca sobre um eixo e sua posição, em metros, em cada instante é dada por* $x(t) = 3t + 4$*, em que* t *é o tempo medido em segundos.*

(a) *Qual a posição inicial do móvel, isto é, a posição no instante* $t = 0\,s$*?*

(b) *Qual a posição do móvel após* $10\,s$*?*

(c) *Qual a distância percorrida pelo móvel entre os instantes* $t = 2\,s$ *e* $t = 8\,s$*?*

1.8 *Os pontos dados são vértices de um polígono. Esboce cada polígono no plano cartesiano e determine seu perímetro.*

(a) $A(0,0)$, $B(-1,5)$, $C(4,2)$.

(b) $A(-1,-1)$, $B(1,-5)$, $C(3,7)$.

(c) $A(-3,2)$, $B(1,5)$, $C(5,3)$, $D(1,-2)$.

(d) $A(-5,0)$, $B(-3,-4)$, $C(3,-3)$, $D(7,2)$, $E(1,6)$.

1.9 *Determine as coordenadas dos vértices de um quadrado de lado $2a$, centro na origem e lados paralelos aos eixos coordenados.*

1.10 *Determine as coordenadas dos vértices de um quadrado de lado $2a$, centro na origem e diagonais sobre os eixos coordenados.*

1.11 *Verifique, usando a fórmula da distância, que os pontos dados são colineares.*

(a) $A(1,4)$, $B(2,5)$ e $C(-1,2)$

(b) $A(4,-2)$, $B(-6,3)$ e $C(8,-4)$

(c) $A(-3,-2)$, $B(5,2)$ e $C(9,4)$

1.12 *Três vértices de um retângulo são $(2,-1)$, $(7,-1)$ e $(7,3)$. Determine as coordenadas do quarto vértice.*

1.13 *Dois vértices de um triângulo equilátero são $(-1,1)$ e $(3,1)$. Determine as coordenadas do terceiro vértice.*

1.14 *Verifique, usando a fórmula da distância, que o triângulo ABC é retângulo. Calcule também seu perímetro e sua área.*

(a) $A(1,4)$, $B(7,4)$ e $C(7,6)$

(b) $A(2,2)$, $B(-1,2)$ e $C(-1,5)$

1.15 *Classifique o triângulo ABC quanto às medidas de seus lados (equilátero, isósceles ou escaleno).*

(a) $A(1,0)$, $B(7,3)$ e $C(5,5)$

(b) $A(-3,0)$, $B(3,0)$ e $C(0,5)$

(c) $A(1,4)$, $B(-3,-8)$ e $C(2,7)$

(d) $A(2,-2)$, $B(-2,2)$ e $C(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

1.16 *Determine o ponto eqüidistante de:*

(a) $A(1,7)$, $B(8,6)$, $C(7,-1)$

(b) $A(3,3)$, $B(6,2)$, $C(8,-2)$

1.17 *Determine os pontos que distam 10 unidades de* $(-3,6)$ *e têm abscissa* $x=3$.

1.18 *Os pontos* $A(1,-1)$ *e* $B(5,-3)$ *são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência. Determine as coordenadas do centro e o raio desta circunferência.*

1.19 *Mostre que as diagonais do paralelogramo* $A(0,0)$, $B(1,4)$, $C(5,4)$ *e* $D(4,0)$ *se interceptam ao meio.*

1.20 *Determine as coordenadas do ponto* P *que divide o segmento orientado* P_1P_2 *na razão dada. A seguir, esboce o segmento dado e o ponto* P *encontrado em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas.*

(a) $P_1(4,-3)$, $P_2(1,4)$, $r=2$

(b) $P_1(5,3)$, $P_2(-3,-3)$, $r=\frac{1}{3}$

(c) $P_1(-5,2)$, $P_2(1,4)$, $r=-\frac{5}{3}$

1.21 *Os pontos* $A(1,-1)$, $B(3,3)$ *e* $C(4,5)$ *estão situados na mesma reta. Determine a razão* r *na qual o ponto* B *divide o segmento orientado* AC.

1.22 *Considere o segmento orientado* AB, *em que* $A(2,6)$ *e* $B(-3,-2)$. *Determine o ponto* C, *sobre o prolongamento do segmento* AB, *tal que* $|AC|$ *seja o quádruplo de* $|AB|$.

1.23 *O ponto* $C(1,-1)$ *está a* $\frac{2}{5}$ *da distância que vai de* $A(-1,-5)$ *a* $B(x,y)$. *Determine as coordenadas do ponto* B.

1.24 *O ponto* $B(-4,1)$ *está a* $\frac{3}{5}$ *da distância que vai de* $A(2,-2)$ *a* $C(x,y)$. *Determine as coordenadas do ponto* C.

1.25 *Dados* $A\left(\frac{1}{2},-4\right)$ *e* $B\left(\frac{5}{2},2\right)$, *determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento* AB *em três partes iguais.*

1.26 *Determine o ponto médio de cada lado do triângulo* ABC.

(a) $A(1,0)$, $B(7,3)$ *e* $C(5,5)$

(b) $A(-3,0)$, $B(3,0)$ *e* $C(0,5)$

(c) $A(1,4)$, $B(-3,-8)$ *e* $C(2,7)$

(d) $A(3,8)$, $B(-11,3)$ *e* $C(-8,-2)$

1.27 *Sendo* $M(3,2)$, $N(3,4)$ *e* $P(-1,3)$ *os pontos médios dos respectivos lados* AB, BC *e* CA *de um triângulo* ABC, *determine os vértices* A, B *e* C.

1.28 *Em um triângulo, denominamos de mediana o segmento que une um dado vértice ao ponto médio do lado oposto. Determine a medida das 3 medianas do triângulo* ABC.

(a) $A(1,0)$, $B(3,0)$ *e* $C(2,7)$

(b) $A(1,8)$, $B(-3,-8)$ *e* $C(2,-2)$

1.2 Problemas Suplementares

1.29 *Sejam* a *e* b *dois números reais quaisquer. Discuta a posição relativa dos pontos* P *e* Q.

(a) $P(a,b)$ *e* $Q(a,-b)$

(b) $P(a,b)$ *e* $Q(-a,b)$

(c) $P(a,b)$ *e* $Q(-a,-b)$

(d) $P(a,b)$ *e* $Q(b,a)$

1.30 *As medianas de um triângulo concorrem num ponto* $P(x,y)$ *que se encontra a* $\frac{2}{3}$ *da distância que vai de um vértice qualquer ao ponto médio do lado oposto. Esse ponto é o centro de gravidade do triângulo, denominado baricentro. Determine as coordenadas do baricentro de um triângulo de vértices* $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ *e* $C(x_3,y_3)$.

1.31 *Determine as coordenadas do baricentro de cada um dos triângulos de vértices:*

(a) $(5,7)$, $(1,-3)$ *e* $(-5,1)$

(b) $(2,-1)$, $(6,7)$, $(-4,-3)$

1.32 *Prove que o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é eqüidistante dos três vértices*[1].

1.33 *Prove que os segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados de um triângulo o dividem em quatro triângulos de áreas iguais*[2].

[1] Sugestão: sem perda de generalidade, considere o triângulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$ e $(0,b)$.
[2] Sugestão: sem perda de generalidade, considere o triângulo de vértices $(0,0)$, (a,b) e $(c,0)$.

Capítulo 2

Estudo da reta

2.1 Problemas Propostos

2.1 *Marque cada par de pontos no plano cartesiano; trace a reta que passa por eles e determine a equação reduzida dessa reta.*

(a) $(5,0)$ *e* $(1,4)$

(b) $(-3,0)$ *e* $(1,4)$

(c) $(-2,3)$ *e* $(1,9)$

(d) $(-1,1)$ *e* $(1,5)$

(e) $(-2,-4)$ *e* $(-1,1)$

(f) $(2,-4)$ *e* $(-1,5)$

(g) $(-2,4)$ *e* $(1,-5)$

(h) $(2,4)$ *e* $(1,-5)$

(i) $(-2,4)$ *e* $(-1,-5)$

(j) $(-2,-4)$ *e* $(-1,-5)$

(k) $(0,3)$ *e* $(4,3)$

(l) $(1,1)$ *e* $(3,1)$

(m) $(1,1)$ *e* $(1,4)$

(n) $(3,-2)$ *e* $(3,5)$

Analisando os resultados obtidos, o que você pode inferir sobre a posição da reta quando seu coeficiente angular é positivo? E quando é negativo? E quando é nulo? E quando não existe?

2.2 *Esboce o gráfico e determine a equação da reta que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *inclinação de* 45^o *e passa pelo ponto* $P(2,4)$

(b) *inclinação de* 60^o *e passa pelo ponto* $P(2,4)$

(c) *inclinação de* 135^o *e passa pelo ponto* $A(3,5)$

(d) *inclinação de* 45^o *e passa pelo ponto médio dos pontos* $(3,-5)$ *e* $(1,-1)$

(e) *paralela à reta* $y = 3x - 4$ *e passa pelo ponto* $P(1,2)$

(f) *perpendicular à reta* $y = 3x - 4$ *e passa pelo ponto* $P(1,2)$

2.3 *Indique, por meio de um esboço, a região do plano cartesiano na qual os pontos* (x,y) *satisfazem a condição dada.*

(a) $x > 2$

(b) $x > 3$ *e* $y < 5$

(c) $-2 \leq x < 4$

(d) $1 \leq x < 5$ *e* $y \geq 0$

2.4 *Determine se os três pontos dados são colineares (resolva o problema de dois modos: usando o coeficiente angular e a fórmula da distância).*

(a) $(1,-4)$, $(-2,-13)$ *e* $(5,8)$

(b) $(1,-7)$, $(4,2)$ *e* $(2,1)$

(c) $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$, $(\frac{1}{4},-\frac{13}{8})$ *e* $(-\frac{1}{2},-2)$

2.5 *Determine se os três pontos dados formam um triângulo retângulo (resolva o problema de dois modos: usando o coeficiente angular e o Teorema de Pitágoras).*

(a) $(1,-3)$, $(2,7)$ *e* $(-2,5)$

(b) $(1,2)$, $(0,1)$ *e* $(-1,2)$

(c) $(0,0)$, $(3,6)$ *e* $(-4,2)$

2.6 *Esboce cada par de retas no plano cartesiano e determine o ponto de interseção.*

(a) $y = x - 2$ *e* $y = -2x + 4$

(b) $y = 2x - 7$ *e* $y = -2x + 1$

(c) $y = 3x - 1$ *e* $y = -5x + 2$

(d) $y = 2x - 5$ *e* $y = 2x + 5$

2.7 *Considere o quadrilátero* $ABCD$*, em que* $A(-1,2)$*,* $B(1,3)$*,* $C(2,-2)$ *e* $D(0,-3)$*. Determine as coordenadas do ponto de interseção de suas diagonais.*

2.8 *Da família de retas* $3x - my + m^2 = 0$*, determine as equações daquelas que passam pelo ponto* $(-4,4)$*.*

2.9 *Determine o(s) valor(es) de* k *para que a reta* $(k+4)x + (9-k^2)y + (k-6)^2 = 0$

(a) seja paralela ao eixo-x

(b) seja paralela ao eixo-y

(c) passe pela origem

2.10 *Considere as retas* $r : kx - (k+2)y = 2$ *e* $s : ky - x = 3k$*. Determine* k *de modo que* r *e* s *sejam:*

(a) concorrentes *(b) paralelas* *(c) coincidentes*

2.11 *Para todo número real* p*, a equação* $(p-1)x + 4y + p = 0$ *representa uma reta. Determine* p *de modo que a reta seja:*

(a) paralela à reta $4x - 2y + 6 = 0$ *(b) perpendicular à reta* $4y - x = 1$

2.12 *Determine as coordenadas do ponto* Q*, simétrico de* $P(-1, 6)$ *em relação à reta* $3x - 4y + 2 = 0$.

2.13 *O conjunto de todos os pontos eqüidistantes de dois pontos* A *e* B *dados é chamado reta mediatriz do segmento* AB*. Esboce e determine a equação reduzida da mediatriz do segmento* AB *de dois modos:*

(i) igualando a distância do ponto $P(x, y)$ *a* A *e* B *e simplificando a equação obtida;*

(ii) usando o ponto médio do segmento AB *e um coeficiente angular adequado.*

(a) $A(-1, -3)$ *e* $B(5, -1)$

(b) $A(2, 4)$ *e* $B(-6, -2)$

(c) $A(-3, -2)$ *e* $B(-3, 5)$

(d) $A(3, -2)$ *e* $B(3, 7)$

2.14 *Determine a distância do ponto* P_0 *à reta* r *nos casos:*

(a) $P_0(2, 5)$ *e* $r : y = 1$

(b) $P_0(-3, 4)$ *e* $r : x + 2 = 0$

(c) $P_0(1, -3)$ *e* $r : 4x - 2y + 2 = 0$

(d) $P_0(-3, 5)$ *e* $r : y = 5x - 3$

2.15 *Determine as coordenadas do ponto da reta* $2x - y + 3 = 0$ *que é eqüidistante dos pontos* $A(3, 0)$ *e* $B(1, -4)$.

2.16 *Em um triângulo* ABC *os lados* AB *e* BC *têm a mesma medida e dois vértices são* $A(2, \frac{1}{2})$ *e* $C(\frac{2}{3}, 1)$*. Determine a abscissa do ponto em que a altura relativa ao lado* AC *o intercepta.*

2.17 *Esboce e determine a área da região limitada pelas retas* $4x-7y+18 = 0$, $2x-y-6 = 0$ *e* $4x + 3y - 2 = 0$.

2.18 *Considere os pontos* $A(1, 2)$ *e* $B(3, 4)$*. Determine o ponto* C *do primeiro quadrante, sobre a reta* $y = 3x + 2$*, de modo que o triângulo* ABC *tenha área* 5.

2.19 *Determine o perímetro e a área do triângulo* ABC*, cujo vértice* A *está no eixo das abscissas, o vértice* B *no eixo das ordenadas e as retas suportes dos lados* AC *e* BC *têm equações* $x + y = 4$ *e* $y - x = 3$ *respectivamente.*

2.20 *A reta* r_1 *determina um ângulo de 120º com a reta* r_2*, cujo coeficiente angular é* $-\frac{1}{3}$*. Determine o coeficiente angular de* r.

2.21 *Determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas:*

(a) $x = 1$ *e* $y = 2$ *(b)* $2x + 5y = 1$ *e* $5x - 2y = -3$

2.22 *Uma das diagonais de um losango é o segmento de extremos* $(1, 4)$ *e* $(3, 2)$. *Determine a equação da reta suporte da outra diagonal.*

2.23 *Dada a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $y = f(x) = 2x - 10$,

(a) determine as coordenadas do ponto onde seu gráfico corta o eixo-x*;*

(b) determine as coordenadas do ponto onde seu gráfico corta o eixo-y*;*

(c) utilize as informações obtidas para esboçar seu gráfico.

2.24 *Voltando ao Exemplo* **??**:

(a) qual a unidade do coeficiente angular da reta obtida? Qual é o seu significado?

(b) qual a unidade do coeficiente linear da reta obtida? Qual é o seu significado?

2.25 *Voltando ao Exemplo* **??**:

(a) qual o significado do coeficiente angular da reta obtida?

(b) qual o significado do coeficiente linear da reta obtida?

2.26 *Dada a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $f(x) = 3x - 4$, *determine as constantes* a *e* b, *sabendo-se que* $f(a) = 2b$ *e* $f(b) = 9a - 28$.

2.27 *Uma função* $f(x) = ax + b$ *é tal que* $f(3) = 2$ *e* $f(4) = 2f(2)$. *Determine* f.

2.28 *Uma função* $f(x) = ax + b$ *é tal que* $f(0) = 1 + f(1)$ *e* $f(-1) = 2 - f(0)$. *Determine* $f(3)$.

2.29 *Um avião parte de um ponto* P *no instante* $t = 0$ *e viaja para o oeste a uma velocidade constante de* $450\,Km/h$.

(a) Escreva uma expressão para a distância d *(em* Km*) percorrida pelo avião em função do tempo* t *(em horas).*

(b) Trace o gráfico $d \times t$.

(c) Qual o significado do coeficiente angular da reta obtida?

2.2 Problemas Suplementares

2.30 *A equação da reta na forma (**??**) tem a vantagem da conexão direta com o raciocínio geométrico utilizado para obtê-la, ilustrado na* Figura **??**. *Porém, rigorosamente, a equação de uma reta não pode ser deixada nessa forma. Por quê?*

2.31 *Prove que o segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado*[1].

2.32 *Mostre que a distância da origem à reta* $Ax+By+C=0$ *é dada por* $D=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2.33 *Mostre que a distância entre as retas paralelas* $Ax+By+C_1=0$ *e* $Ax+By+C_2=0$ *é dada por:*

$$D=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

2.34 *Determine a distância entre as retas dadas*

(a) $\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 2x+3y-10=0 \end{cases}$ *(c)* $\begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+3y-7=0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x-y+7=0 \\ -3x+y+7=0 \end{cases}$ *(d)* $\begin{cases} y=5x-7 \\ y=5x+3 \end{cases}$

2.35 *Determine a equação da reta paralela à reta* $3x+4y+15=0$ *e que dista* 3 *unidades desta.*

2.36 *Determine a equação da reta equidistante de* $3x+y-10=0$ *e* $3x+y-4=0$.

2.37 *Considere duas retas concorrentes, não verticais, de equações reduzidas* $y=a_1x+b_1$ *e* $y=a_2x+b_2$. *Se* θ *é um dos ângulos formado por essas retas, mostre que*[2]*:*

$$cos(\theta)=\frac{1+a_1a_2}{\sqrt{1+a_1^2}\,\sqrt{1+a_2^2}}\,.$$

[1] Sugestão: sem perda de generalidade, considere o triângulo de vértices $(0,0)$, (a,b) e $(c,0)$.

[2] Sugestão: utilize uma construção semelhante à Figura **??** e aplique a **lei dos cossenos**, uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo qualquer, explicada a seguir.

Consideremos o triângulo acutângulo (três ângulos agudos) ABC, Figura 2.1(a), onde CH é a altura relativa ao lado AB. No triângulo retângulo AHC temos:

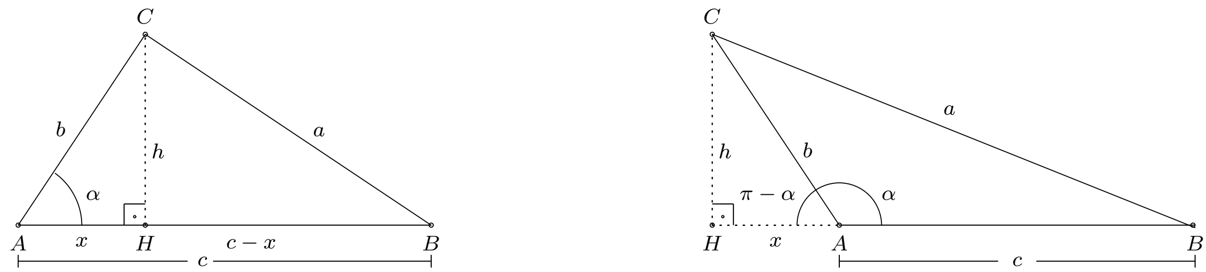
$$b^2=x^2+h^2 \;\therefore\; h^2=b^2-x^2 \quad \text{e} \quad cos(\alpha)=\frac{x}{b} \;\therefore\; x=b\,cos(\alpha) \tag{2.1a}$$

No triângulo retângulo BHC temos $a^2=h^2+(c-x)^2 \;\therefore\; a^2=h^2+c^2-2cx+x^2$. Substituindo os resultados dados em (2.1a) nessa equação obtemos

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,cos(\alpha),$$

---

que é a lei dos cossenos para o ângulo α do triângulo acutângulo ABC da Figura 2.1(a).



(a) Triângulo acutângulo (b) Triângulo obtusângulo

Figura 2.1: A lei dos cossenos

Consideremos agora o triângulo obtusângulo (um ângulo obtuso) ABC, Figura 2.1(b), onde CH é a altura relativa ao lado AB. No triângulo retângulo AHC temos:

$$b^2 = x^2 + h^2 \;\therefore\; h^2 = b^2 - x^2 \quad \text{e} \quad cos(\pi - \alpha) = \frac{x}{b} \;\therefore\; x = b\,cos(\pi - \alpha) \tag{2.1b}$$

No triângulo retângulo BHC temos $a^2 = h^2 + (c + x)^2 \quad \therefore \quad a^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2$. Lembrando que $cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha)$, substituindo os resultados dados em (2.1b) nessa equação obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\; cos(\alpha),$$

que é a lei dos cossenos para o ângulo α do triângulo obtusângulo ABC da Figura 2.1(b), resultado idêntico ao obtido para triângulos acutângulos.

É interessante observar que se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, isto é, caso o triângulo seja retângulo, a lei dos cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras.

Capítulo 3

Lugares Geométricos

3.1 Problemas Propostos

3.1 *Esboce e determine a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos pontos* $A(-3,1)$ *e* $B(7,5)$

3.2 *Esboce e determine a equação do lugar geométrico dos pontos cuja distância ao ponto* $A(2,-1)$ *vale* 5.

3.3 *Esboce e determine a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos eixos coordenados.*

3.4 *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias aos pontos* $A(0,0)$ *e* $B(2,-4)$ *vale* 20.

3.5 *Um segmento de reta com* 12 *unidades de comprimento se desloca de modo que seus extremos se encontram sempre apoiados sobre os eixos coordenados. Determine a equação do lugar geométrico descrito por seu ponto médio.*

3.6 *Considere os pontos* $A(2,4)$ *e* $B(5,-3)$. *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos* P *sabendo-se que o coeficiente angular da reta por* A *e* P *é uma unidade maior que o coeficiente angular da reta por* B *e* P.

3.7 *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do ponto* $A(3,5)$ *e da reta* $y=1$.

3.8 *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do ponto* $A(-2,1)$ *e da reta* $x=3$.

3.9 *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos eqüidistantes do ponto* $A(1,1)$ *e da reta* $y = -x$.

3.10 *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias aos pontos* $A(-5,0)$ *e* $B(5,0)$ *vale* 12.

3.11 *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias aos pontos* $A(0,2)$ *e* $B(6,2)$ *vale* 6.

3.12 *Determine a equação do lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias aos pontos* $A(-5,0)$ *e* $B(5,0)$ *vale* 8.

3.13 *Determine a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que a diferença entre os quadrados de suas distâncias aos pontos* $(2,-2)$ *e* $(4,1)$ *vale* 12.

Capítulo 4

Seções Cônicas

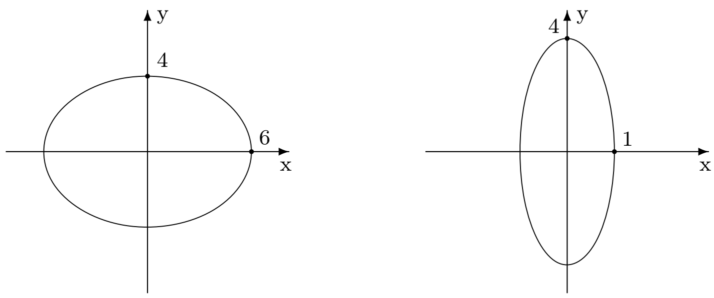
4.1 Problemas Propostos

4.1 *Esboce e determine a área da região do plano cartesiano delimitada pelas desigualdades:*

$$x^2 + y^2 \leq 64, \quad x + y \geq 4, \quad x \geq 0, \quad e \quad y \geq 0.$$

4.2 *Determine a equação da reta que tangencia a circunferência* $x^2 + y^2 = 16$ *no ponto* $P(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

4.3 *Escreva as equações das elipses mostradas na* Figura 4.1 *e determine as coordenadas de seus focos.*



(a) Elipse horizontal (b) Elipse vertical

Figura 4.1: Elipses do Problema 4.3

4.4 *Dada a elipse* $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, *esboce seu gráfico e determine:*

(a) o comprimento do semi-eixo maior

(b) o comprimento do semi-eixo menor

(c) as coordenadas dos focos

(d) as coordenadas dos vértices

4.5 *Dada a elipse* $225x^2 + 289y^2 = 65025$, *esboce seu gráfico e determine:*

(a) o comprimento do semi-eixo maior

(b) o comprimento do semi-eixo menor

(c) as coordenadas dos focos

(d) as coordenadas dos vértices

4.6 *Dada a elipse* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$*, esboce seu gráfico e determine:*

(a) o comprimento do semi-eixo maior

(b) o comprimento do semi-eixo menor

(c) as coordenadas dos focos

(d) as coordenadas dos vértices

4.7 *Determine a equação da elipse de focos* $(\pm 3, 0)$ *e que passa pelo ponto* $(0, 4)$.

4.8 *Determine a equação da elipse com centro na origem, um foco em* $(0, 3)$ *e eixo maior medindo* 10 *unidades.*

4.9 *Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos pontos* $(0, \pm 5)$ *vale* 26.

4.10 *Determine os pontos em que a reta* $5x + y = 5$ *intercepta a elipse* $25x^2 + y^2 = 25$.

4.11 *Determine os pontos em que a reta* $x + 2y = 6$ *intercepta a elipse* $x^2 + 4y^2 = 20$. *Esboce ambos os gráficos no mesmo sistema de coordenadas e assinale os pontos de interseção.*

4.12 *Esboce cada uma das parábolas, indicando as coordenadas do foco e a equação da diretriz.*

(a) $y = 8x^2$

(b) $y = 2x^2$

(c) $y = -4x^2$

(d) $y = \frac{1}{8}x^2$

(e) $x = 6y^2$

(f) $x = -8y^2$

(g) $x^2 = 2y$

(h) $y^2 = 3x$

4.13 *Determine o valor de* k *para que a parábola* $y = kx^2$ *tenha foco no ponto* $(0, 3)$. *Esboce a parábola encontrada no sistema de coordenadas cartesianas.*

4.14 *Para cada valor de* $k \neq 0$*, a equação* $y^2 = 2kx$ *representa uma parábola. Determine a equação e esboce:*

(a) a que passa por $(2, \sqrt{5})$;

(b) aquela cujo foco é $(-3, 0)$;

(c) aquela cuja diretriz é $x + 7 = 0$.

4.15 *Determine os pontos em que a reta* $x + y = 1$ *intercepta a parábola* $x^2 - y = 0$.

4.16 *Em um farol parabólico a abertura tem diâmetro de* 80 *cm e profundidade, sobre seu eixo, de* 20 *cm. Determine a distância, em relação ao vértice do farol, em que a lâmpada deve ser posicionada.*

4.17 *Um telescópio refletor tem um espelho parabólico para o qual a distância do vértice ao foco é* 3 *cm. Se o diâmetro da abertura do espelho for* 64 *cm, qual a profundidade do espelho no centro?.*

4.18 *Suponha que a órbita de um planeta tenha a forma de uma elipse com eixo maior cujo comprimento é* 500 *milhões de quilômetros. Se a distância entre os focos for de* 400 *milhões de quilômetros, ache a equação da órbita.*

4.19 *Escreva as equações das assíntotas de cada uma das hipérboles.*

(a) $9x^2 - y^2 = 9$ *(b)* $4x^2 - 7y^2 = 28$ *(c)* $4y^2 - 9x^2 = 36$

4.20 *Para cada hipérbole dada determine as coordenadas dos vértices e dos focos, escreva as equações de suas assíntotas e esboce-a (juntamente com suas assíntotas) no sistema de coordenadas cartesianas.*

(a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

(b) $y^2 - 4x^2 = 16$

(c) $x^2 - y^2 = 1$

(d) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

4.21 *Determine a equação da hipérbole que satisfaz as condições dadas.*

(a) Focos $(0, \pm 4)$ *e vértices* $(0, \pm 1)$.

(b) Focos $(\pm 5, 0)$ *e vértices* $(\pm 3, 0)$.

(c) Vértices $(\pm 3, 0)$ *com assíntotas* $y = \pm 2x$.

4.22 *Determine a equação da hipérbole com centro na origem, eixo principal vertical e que passa pelos pontos* $(4, 6)$ *e* $(1, -3)$.

4.23 *Determine a equação de cada seção cônica.*

(a) Hipérbole de vértices $(0, \pm 7)$ *e* $b = 3$.

(b) *Parábola de foco* $(0, -10)$ *e diretriz* $y = 10$.

(c) *Elipse de vértices* $(0, \pm 10)$ *e focos* $(0, \pm 5)$.

(d) *Hipérbole de vértices* $(0, \pm 6)$ *e assíntotas* $y = \pm 9x$.

4.24 *Ache a equação da hipérbole cujos focos são os vértices da elipse* $7x^2 + 11y^2 = 77$ *e cujos vértices são os focos dessa elipse.*

4.25 *A* Figura 4.2 *mostra o vão da entrada de um armazém pelo qual passará um caminhão com* $4\,m$ *de largura. Determine a altura máxima do caminhão sabendo-se que o arco superior do vão é semi-elíptico.*

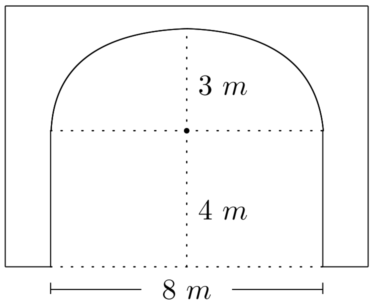


Figura 4.2: Vão de entrada de um armazém

4.26 *O teto de um saguão com* 10 m *de largura tem a forma de uma semi-elipse com* 9 m *de altura no centro e* 6 m *de altura nas paredes laterais. Ache a altura do teto a* 2 m *de cada parede.*

4.27 *O arco de uma ponte tem a forma de uma semi-elipse com um vão horizontal de* 40 m *e com* 16 m *de altura no centro. Qual a altura do arco a* 9 m *à esquerda ou à direita do centro?*

4.28 *Determine o valor da constante* m *para que a reta* $y = mx + 8$ *seja tangente à elipse* $16x^2 + 25y^2 = 400$.

4.2 Problemas Suplementares

4.29 *Mostre que, para que a reta* $ax + by + c = 0$ *seja tangente à parábola* $y^2 = kx$, *devemos ter* $4ac = kb^2$.

4.30 *Seja* P *um ponto qualquer de uma hipérbole. Mostre que o produto das distâncias desse ponto às assíntotas dessa hipérbole é constante (isto é, esse produto é o mesmo para todos os pontos da hipérbole).*

4.31 *(**Necessita de cálculo diferencial**) Prove o princípio de reflexão das parábolas, isto é, na* Figura **??** *mostre que* $\alpha = \beta$.

4.32 *(**Necessita de cálculo diferencial**) Prove o princípio de reflexão das elipses, isto é, na* Figura **??** *mostre que* $\alpha = \beta$.

4.33 *(**Necessita de cálculo diferencial**) Prove o princípio de reflexão das hipérboles, isto é, na* Figura **??** *mostre que* $\alpha = \beta$.

Apêndice A - Respostas dos Problemas

Capítulo 1

- Problema 1.1 (pág. 1)
  - (a) $|AB| = 16$
  - (b) $|BA| = 16$
  - (c) $\overline{AB} = 11 - (-5) = 16$
  - (d) $\overline{BA} = -5 - 11 = -16$
- Problema 1.2 (pág. 1) (-7) e (11)
- Problema 1.3 (pág. 1) $B(-17)$
- Problema 1.4 (pág. 1)
  Ponto médio (13). Pontos de triseção (11) e (15).
- Problema 1.5 (pág. 1) $P(2a+1)$
- Problema 1.6 (pág. 1) $P(\frac{5}{2})$
- Problema 1.7 (pág. 1)
  - (a) $x(0) = 4\,m.$
  - (b) $x(10) = 34\,m.$
  - (c) $x(8) - x(2) = 28 - 10 = 18\,m.$
- Problema 1.8 (pág. 2)
  - (a) $2\sqrt{5} + \sqrt{26} + \sqrt{34}$
  - (b) $6\sqrt{5} + 2\sqrt{37}$
  - (c) $5 + 2\sqrt{5} + \sqrt{41} + 4\sqrt{2}$
  - (d) $2\sqrt{5} + \sqrt{37} + \sqrt{41} + 2\sqrt{13} + 6\sqrt{2}$
- Problema 1.9 (pág. 2)
  (a,a), $(-a,a)$, $(-a,-a)$ e $(a,-a)$
- Problema 1.10 (pág. 2)
  $(a\sqrt{2},0)$, $(0,a\sqrt{2})$, $(-a\sqrt{2},0)$ e $(0,-a\sqrt{2})$
- Problema 1.11 (pág. 2)
  - (a) $\overline{AB} = \sqrt{2}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 3\sqrt{2}$
  - (b) $\overline{AB} = 5\sqrt{5}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 7\sqrt{5}$
  - (c) $\overline{AB} = 4\sqrt{5}$, $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$
- Problema 1.12 (pág. 2) $(2,3)$
- Problema 1.13 (pág. 2) $(1,1)$ e $(1,-1)$
- Problema 1.14 (pág. 2)
  - (a) Perímetro: $8 + 2\sqrt{10}$. Área: 6
  - (b) Perímetro: $6 + 3\sqrt{2}$. Área: $\frac{9}{2}$
- Problema 1.15 (pág. 2)
  - (a) Escaleno
  - (b) Isósceles
  - (c) Escaleno
  - (d) Isósceles
- Problema 1.16 (pág. 2)
  - (a) Ponto $(4,3)$
  - (b) Ponto $(3,-2)$
- Problema 1.17 (pág. 3) $(3,-2)$ e $(3,14)$
- Problema 1.18 (pág. 3) Centro $(3,-2)$ e raio $\sqrt{5}$
- Problema 1.20 (pág. 3)
  - (a) $\left(2, \frac{5}{3}\right)$
  - (b) $\left(3, \frac{3}{2}\right)$
  - (c) $(10,7)$
- Problema 1.21 (pág. 3) $r = 2$
- Problema 1.22 (pág. 3) $(-18,-26)$ ou $(22,38)$
- Problema 1.23 (pág. 3) $B(4,5)$
- Problema 1.24 (pág. 3) $C(-8,3)$
- Problema 1.25 (pág. 3) $(\frac{11}{6},0)$ e $(\frac{7}{6},-2)$
- Problema 1.26 (pág. 3)
  - (a) $\left(3,\frac{5}{2}\right)$, $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ e $(6,4)$
  - (b) $(0,0)$, $\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$
  - (c) $(-1,-2)$, $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$
  - (d) $\left(-4,\frac{11}{2}\right)$ e $\left(-\frac{5}{2},3\right)$ e $\left(-\frac{19}{2},\frac{1}{2}\right)$
- Problema 1.27 (pág. 4)
  $A(-1,1)$, $B(7,3)$ e $C(-1,5)$
- Problema 1.28 (pág. 4)
  - (a) $\frac{\sqrt{58}}{2}$, $\frac{\sqrt{58}}{2}$ e 7

(b) $\frac{\sqrt{685}}{2}$, $\frac{\sqrt{565}}{2}$ e $\sqrt{13}$

- Problema 1.29 (pág. 4)

  (a) simétricos em relação ao eixo x

  (b) simétricos em relação ao eixo y

  (c) simétricos em relação à origem

  (d) simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares

- Problema 1.30 (pág. 4) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

- Problema 1.31 (pág. 4)

  (a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$

Capítulo 2

- Problema 2.1 (pág. 5)

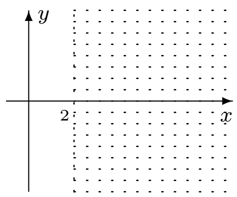
(a) $y = -x + 5$	(e) $y = 5x + 6$	(i) $y = -9x - 14$	(m) $x = 1$
(b) $y = x + 3$	(f) $y = -3x + 2$	(j) $y = -x - 6$	(n) $x = 3$
(c) $y = 2x + 7$	(g) $y = -3x - 2$	(k) $y = 3$	
(d) $y = 2x + 3$	(h) $y = 9x - 14$	(l) $y = 1$	

  - Se $a > 0$, reta ascendente
  - se $a < 0$, reta descendente
  - se $a = 0$, reta horizontal
  - se $a \nexists$, reta vertical

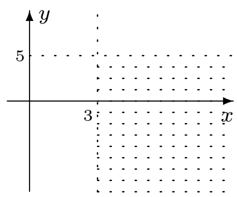
- Problema 2.2 (pág. 5)

(a) $y = x + 2$	(c) $y = -x + 8$	(e) $y = 3x - 1$
(b) $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 4$	(d) $y = x - 5$	(f) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

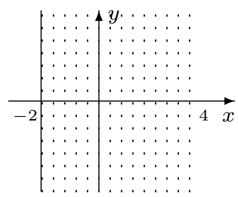
- Problema 2.3 (pág. 5)



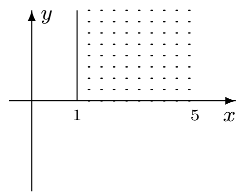
(a) $x > 2$



(b) $x > 3$ e $y < 5$



(c) $-2 \leq x < 4$



(d) $1 \leq x < 5$ e $y \geq 0$

- Problema 2.4 (pág. 6)

  (a) sim (b) não (c) sim

- Problema 2.5 (pág. 6)

  (a) não (b) sim (c) sim

- Problema 2.6 (pág. 6)

  (a) $(2, 0)$ (c) $\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$

  (b) $(2, -3)$ (d) $\nexists$

- Problema 2.7 (pág. 6) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

- Problema 2.8 (pág. 6)
  $3x - 6y + 36 = 0$ e $3x + 2y + 4 = 0$

- Problema 2.9 (pág. 6)

  (a) $k = -4$ (b) $k = \pm 3$ (c) $k = 6$

- Problema 2.10 (pág. 6)

  (a) $k \neq -1$ e $k \neq 2$

  (b) $k = -1$ ou $k = 2$

  (c) $\nexists k \in \mathbb{R}$

- Problema 2.11 (pág. 6)

  (a) $p = -7$ (b) $p = 17$

- Problema 2.12 (pág. 7) $P'(5, -2)$

- Problema 2.13 (pág. 7)

  (a) $y = -3x + 4$
  (b) $4x + 3y + 5 = 0$
  (c) $2y - 3 = 0$
  (d) $2y - 5 = 0$

- Problema 2.14 (pág. 7)

  (a) 4
  (b) 1
  (c) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
  (d) $\frac{23}{\sqrt{26}}$

- Problema 2.15 (pág. 7) Resposta $(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})$
- Problema 2.16 (pág. 7) $\frac{4}{3}$
- Problema 2.17 (pág. 7) 20
- Problema 2.18 (pág. 7) $C(2, 8)$
- Problema 2.19 (pág. 7) $P = 5 + 4\sqrt{2}$ e $A = \frac{7\sqrt{2}}{16}$
- Problema 2.20 (pág. 7) $-\frac{6+5\sqrt{3}}{3}$
- Problema 2.21 (pág. 7)

  (a) $x - y + 1 = 0$ ou $x + y - 3 = 0$
  (b) $7y - 3x - 4 = 0$ ou $7x + 3y + 2 = 0$

- Problema 2.22 (pág. 8) $x - y + 1 = 0$
- Problema 2.23 (pág. 8)

  (a) $(5, 0)$
  (b) $(0, -10)$

- Problema 2.24 (pág. 8)

  (a) $\frac{atm}{m}$. Para cada aumento de 1 m na profundidade há um aumento de $\frac{1}{10}$ atm na pressão.
  (b) 1 atm. Na superfície a pressão é de 1 atm.

- Problema 2.25 (pág. 8)

  (a) $\frac{^oF}{^oC}$. Para cada aumento de 1 ^oC há um aumento de $\frac{9}{5}$ ^oF na temperatura.
  (b) 32 ^oF. Quando a temperatura for 0 ^oC na escala Celsius vale 32^oF na escala Farenheit.

- Problema 2.26 (pág. 8) $a = b = 4$
- Problema 2.27 (pág. 8) $f(x) = \frac{2}{3}x$
- Problema 2.28 (pág. 8) $f(3) = -\frac{5}{2}$
- Problema 2.29 (pág. 8)

  (a) $d = 450t$.
  (b) Omitida!
  (c) a velocidade do avião.

- Problema 2.34 (pág. 9)

  (a) $\frac{5}{\sqrt{13}}$
  (b) $\frac{14}{\sqrt{10}}$
  (c) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$
  (d) $\frac{10}{\sqrt{26}}$

- Problema 2.35 (pág. 9) $3x+4y+30 = 0$ ou $3x+4y = 0$
- Problema 2.36 (pág. 9) $3x + y - 7 = 0$
- Problema 2.30 (pág. 9) Omitida! Pense um pouco mais!

Capítulo 3

- Problema 3.1 (pág. 11) $5x + 2y = 16$
- Problema 3.2 (pág. 11) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$
- Problema 3.3 (pág. 11) $y = x$ e $y = -x$
- Problema 3.4 (pág. 11) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
- Problema 3.5 (pág. 11) $x^2 + y^2 = 36$
- Problema 3.6 (pág. 11) $x^2 + 3y = 16$
- Problema 3.7 (pág. 11) $x^2 - 6x - 8y = -33$
- Problema 3.8 (pág. 11) $y^2 - 2y + 10x = 4$
- Problema 3.9 (pág. 12) $x^2 + y^2 - 2xy + -4x - 4y = -4$
- Problema 3.10 (pág. 12) $11x^2 + 36y^2 = 396$
- Problema 3.11 (pág. 12) $y = 2$ para $0 \leq x \leq 6$
- Problema 3.12 (pág. 12) $9x^2 - 16y^2 = 144$
- Problema 3.13 (pág. 12) $4x+6y = 21$ ou $4x+6y = -3$

Capítulo 4

- Problema 4.1 (pág. 13) $16\pi - 8$
- Problema 4.2 (pág. 13) $x - y + 4\sqrt{2} = 0$
- Problema 4.3 (pág. 13)

  (a) $16x^2 + 36y^2 = 576$; $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$

(b) $16x^2 + y^2 = 16$; $(0, \pm\sqrt{15})$

- Problema 4.4 (pág. 13)

(a) $a = 13$
(b) $b = 12$
(c) $(\pm 5, 0)$
(d) $(\pm 13, 0)$

- Problema 4.5 (pág. 13)

(a) $a = 17$
(b) $b = 15$
(c) $(\pm 8, 0)$
(d) $(\pm 17, 0)$

- Problema 4.6 (pág. 14)

(a) $a = 3$
(b) $b = 2$
(c) $(0, \pm\sqrt{5})$
(d) $(0, \pm 3)$

- Problema 4.7 (pág. 14) $16x^2 + 25y^2 = 400$
- Problema 4.8 (pág. 14) $25x^2 + 16y^2 = 400$
- Problema 4.9 (pág. 14) $169x^2 + 144y^2 = 24336$
- Problema 4.10 (pág. 14) $(0, 5)$ e $(1, 0)$
- Problema 4.11 (pág. 14) $(2, 2)$ e $(4, 1)$
- Problema 4.12 (pág. 14)

(a) $\left(0, \frac{1}{32}\right)$; $y = -\frac{1}{32}$
(b) $\left(0, \frac{1}{8}\right)$; $y = -\frac{1}{8}$
(c) $\left(0, -\frac{1}{16}\right)$; $y = \frac{1}{16}$
(d) $\left(0, 2\right)$; $y = -2$
(e) $\left(\frac{1}{24}, 0\right)$; $x = -\frac{1}{24}$
(f) $\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$; $x = \frac{1}{32}$
(g) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; $y = -\frac{1}{2}$
(h) $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$; $x = -\frac{3}{4}$

- Problema 4.13 (pág. 14) $k = \frac{1}{12}$
- Problema 4.14 (pág. 14)

(a) $y^2 = \frac{5}{2}x$
(b) $y^2 = -12x$
(c) $y^2 = 28x$

- Problema 4.15 (pág. 15)

$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

- Problema 4.16 (pág. 15) 20 cm
- Problema 4.17 (pág. 15) $\frac{256}{3} \approx 85,33$ cm
- Problema 4.18 (pág. 15)

$\frac{x^2}{62500} + \frac{y^2}{22500} = 1$ (em milhões de Km)

- Problema 4.19 (pág. 15)

(a) $y = \pm 3x$
(b) $y = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}\, x$
(c) $x = \pm \frac{2}{3}\, y$

- Problema 4.20 (pág. 15)

(a) $(\pm 3, 0)$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $y = \pm \frac{2}{3}\, x$
(b) $(0, \pm 4)$, $(0, \pm 2\sqrt{5})$, $y = \pm 2\, x$
(c) $(\pm 1, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$, $y = \pm x$
(d) $(0, \pm 3)$, $(0, \pm\sqrt{13})$, $y = \pm \frac{3}{2}\, x$

- Problema 4.21 (pág. 15)

(a) $15y^2 - x^2 = 15$
(b) $16x^2 - 9y^2 = 144$
(c) $36x^2 - 9y^2 = 324$

- Problema 4.22 (pág. 15) $5y^2 - 9x^2 = 36$
- Problema 4.23 (pág. 15)

(a) $9y^2 - 49x^2 = 441$
(b) $x^2 = -40y$
(c) $4x^2 + 3y^2 = 300$
(d) $y^2 - 81x^2 = 36$

- Problema 4.24 (pág. 16) $7x^2 - 4y^2 = 28$
- Problema 4.25 (pág. 16) $\frac{8+3\sqrt{3}}{2}$ m
- Problema 4.26 (pág. 16) $\frac{42}{5}$ m
- Problema 4.27 (pág. 16) $\frac{4}{5}\sqrt{319}$ m
- Problema 4.28 (pág. 16) $m = \pm\frac{48}{25}$