Somatório

A soma de n termos pode ser simbolicamente representada por

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Partes do símbolo:

A instrução para somar

O n é o último elemento a ser somado

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

x é o nome dos termos a serem somados

O primeiro elemento dos termos a serem somados

i é uma observação individual da série

Lê-se: "Somatório de x_i, para i variando de 1 a n" ou "soma de x_i, para i variando de 1 a n".

O símbolo $\sum$ é a letra grega sigma maiúscula.

Se estamos interessados na soma dos terceiro, quarto, . . .centésimo elementos, devemos escrever:

$$\sum_{i=4}^{100} x_i \; .$$

Propriedades dos somatórios

1. Se cada elemento da série é multiplicado por uma constante, os elementos pode ser somados, e a soma multiplicada pela constante.

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2. A soma de uma constante sobre n termos é igual a n vezes a constante.

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

3. O somatório da soma (ou diferença) é igual à soma (ou diferença) de somatórios.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \pm y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Para melhor compreensão das propriedades, veja alguns exemplos:

Variável x: $x_i=5$ $\quad x_2=3 \quad x_3=-2 \quad x_4=0$

Variável y: $y_1=2$ $\quad y_2=3 \quad y_3=-3 \quad y_4=1$

Para a 1ª propriedade, vamos supor que a constante seja igual a 3, então:

$$\sum_{i=1}^{4} cx_i = c\sum_{i=1}^{4} x_i$$

$$cx_1+cx_2+cx_3+cx_4=c(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

$$3\cdot 5+3\cdot 3+3\cdot(-2)+3\cdot 0=3\cdot\left(5+3+(-2)+0\right)$$

$$18=18$$

Para a 2ª propriedade, vamos supor que a constante seja igual a 3 e n =4, então

$$\sum_{i=1}^{4} c = nc$$

$$c+c+c+c=nc$$

$$3+3+3+3=4\cdot 3$$

$$12=12$$

Para a 3ª propriedade, temos:

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{4}x_i+\sum_{i=1}^{4}y_i$$

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4)=(x_1+x_2+x_3+x_4)+(y_1+y_2+y_3+y_4)$$

$$(5+2)+(3+3)+(-2-3)+(0+1)=[5+3+(-2)+0]+[2+3+(-3)+1]$$

$$9=9$$

Quando não houver possibilidade de dúvidas, podemos eliminar os índices. Assim:

$\sum x$ e $\sum x^2$ podem ser usados, ao invés de $\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

ATENÇÃO: $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{2} x_i\right)^2$$

Somatório duplo:

i \ j	1	2	3	4
1	5	–2	0	1
2	2	1	0	–2
3	1	2	4	3

Calcular $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = [x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}]+[x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}]+[x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}]=$

$$[5+(-2)+0+1]+[2+1+0+(-2)]+[1+2+4+3]= 15$$

Observação: As propriedades vistas anteriormente também são válidas nesses casos.

Produtório

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

A instrução para multiplicar

O n é o último elemento a ser multiplicado

$$\prod_{i=1}^{n} x_i$$

x é o nome dos termos a serem multiplicados

O primeiro elemento dos termos a serem multiplicados

i é uma observação individual da série

Propriedades dos produtórios:

1. Se cada elemento da série é multiplicado por uma constante, o produto dos termos ficará multiplicado pela constante elevada ao número de termos do produtório.

$$\prod_{i=1}^{n} k \cdot x_i = k^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$$

2. O produtório do produto é igual ao produto dos produtórios.

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Para melhor compreensão das propriedades, veja alguns exemplos:

Variável x: $x_i=5$	$x_2=3$	$x_3=-2$	$x_4=1$
Variável y: $y_1=2$	$y_2=3$	$y_3=-3$	$y_4=1$

Para a 1ª propriedade, vamos considerar que a constante seja igual a 3, então:

$$\prod_{i=1}^{4} k \cdot x_i = k^4 \cdot \prod_{i=1}^{4} y_i$$

$$(kx_1) \cdot (kx_2) \cdot (kx_3) \cdot (kx_4) = k^4 \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$$

$$(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 3) \cdot [3 \cdot (-2)] \cdot (3 \cdot 1) = 3^4 \cdot [5 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 1]$$

$$-2.430 = -2.430$$

$$(x_1 \cdot y_1) \cdot (x_2 \cdot y_2) \cdot (x_3 \cdot y_3) \cdot (x_4 \cdot y_4) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4)$$